# Lezioni di Ricerca Operativa 2

**Dott. F. Carrabs**

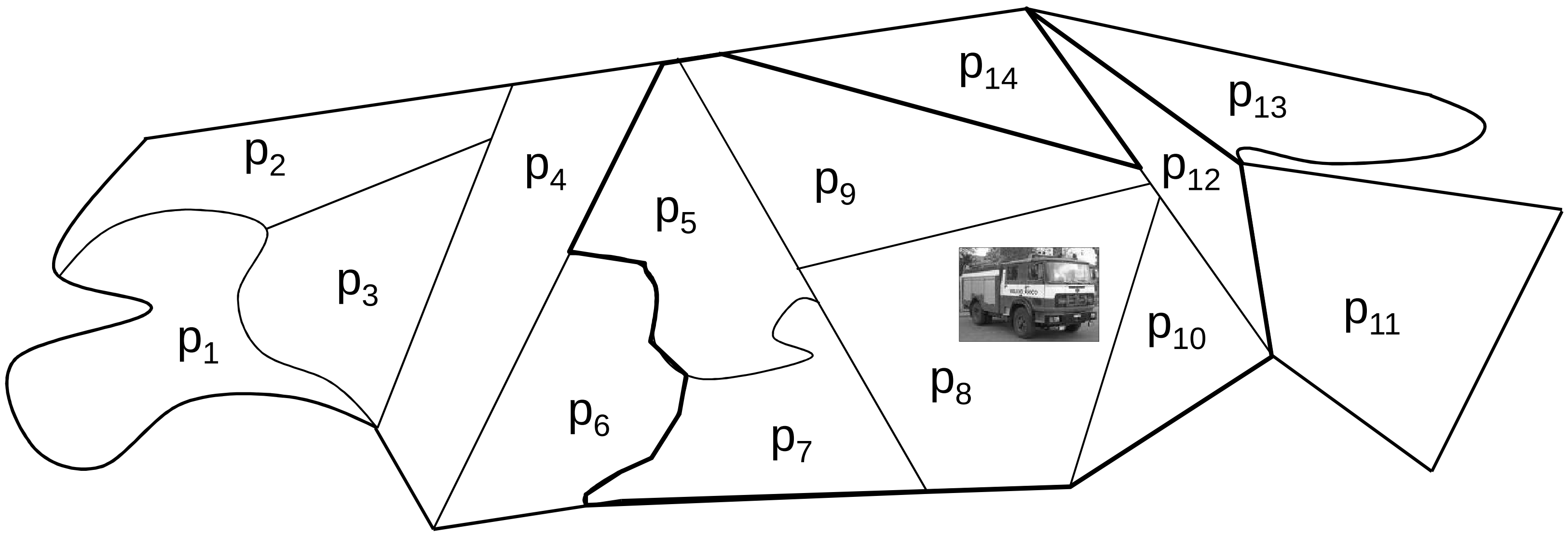
**A.A. 2009/2010**

## Lezione 4b:

- Esercizi svolti

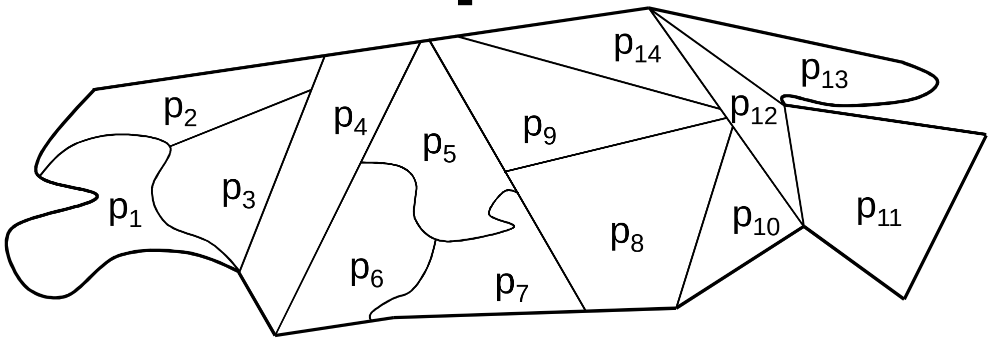
# Esempio di Set Covering

L’amministrazione comunale di una cittadi deve decidere dove costruire le stazioni dei dei pompieri. La mappa della città è stata divisa in zone come mostrato in figura.




Ogni stazione può essere costruita in qualsiasi zona della città. Una volta fissata la zona, la stazione sarà in grado di affrontare eventuali emergenze che si verificano sia in quella zona sia in quelle adiacenti. L’obiettivo dell’amministrazione è quello di minimizzare il numero di stazioni da costruire, garantendo però che tutte le zone della città siano coperte dal servizio.

# Esempio 1: Set Covering




| | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** | **$S_4$** | **$S_5$** | **$S_6$** | **$S_7$** | **$S_8$** | **$S_9$** | **$S_{10}$** | **$S_{11}$** | **$S_{12}$** | **$S_{13}$** | **$S_{14}$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$p_1$** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_2$** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_3$** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_4$** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_5$** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_6$** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_7$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **$p_8$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **$p_9$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **$p_{10}$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **$p_{11}$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **$p_{12}$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **$p_{13}$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **$p_{14}$** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$$\min \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,2,\ldots,m$$

# Esempio 1: Set Covering

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j$$

(1) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

(2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$

(4) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$

(5) $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 1$

(6) $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$

(7) $x_5 + x_7 + x_8 \geq 1$

(8) $x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 1$

(9) $x_5 + x_8 + x_9 + x_{12} + x_{14} \geq 1$

(10) $x_8 + x_{10} + x_{12} \geq 1$

(11) $x_{11} + x_{12} \geq 1$

(12) $x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1$

(13) $x_{12} + x_{13} \geq 1$

(14) $x_9 + x_{12} + x_{14} \geq 1$

$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,2,\ldots, m$

**sw:** ampl
**ampl:** option solver cplex;
**ampl:** model ./Example/Stazione_Pompieri_single.mod;
**ampl:** solve;
CPLEX 11.2.0: optimal integer solution; **objective 3**
0 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
**ampl:** display x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14;
x1 = 0
x2 = 1
x3 = 0
x4 = 0
x5 = 1
x6 = 0
x7 = 0
x8 = 0
x9 = 0
x10 = 0
x11 = 0
x12 = 1
x13 = 0
x14 = 0

# Esempio 1: Set Covering

## .mod

```
param l_zone;
param l_insiemi;
param u_zone > l_zone;
param u_insiemi > l_insiemi;

set zone:=l_zone..u_zone;
set insiemi:=l_insiemi..u_insiemi;

var x{insiemi} binary;
param costo{insiemi};
param b{zone};
param a{zone,insiemi};

minimize obj: sum{i in insiemi} costo[i]*x[i];
subject to     c1 {i in zone}: sum{j in insiemi} a[i,j]*x[j] >= b[i];
```

## .dat

```
param l_zone := 1;
param u_zone := 14;
param l_insiemi := 1;
param u_insiemi := 14;

param costo:=
 1 1
 2 1
 3 1
 4 1
 5 1
 6 1
 7 1
 8 1
 9 1
 10 1
 11 1
 12 1
 13 1
 14 1;

param b:=
1 1
2 1
3 1
4 1
5 1
6 1
7 1
8 1
9 1
10 1
11 1
12 1
13 1
14 1;

param a: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14:=
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
3 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
5 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
6 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
7 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0
9 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1
10 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0
11 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
12 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1
13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1;
```

# Esempio 3: Set Packing

Una giunta regionale deve decidere l'installazione di alcuni inceneritori scegliendo tra 10 zone $p_1, \ldots, p_{10}$ nelle vicinanze di 7 città $C_1, \ldots, C_7$ . La seguente tabella mostra, nelle caselle segnate con "*", se l'area è vicina alla città; la penultima riga mostra la capacità di ogni impianto (in tonnellate all'anno) e l'ultima il costo di installazione, in milioni di Euro.

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| $C_2$ | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| $C_3$ | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| $C_4$ | 1 | | 1 | | | 1 | | | | 1 |
| $C_5$ | | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | |
| $C_6$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | | |
| $C_7$ | | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | 1 |
| $C_8$ | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | |
| **CAP** | 460 | 774 | 129 | 499 | 345 | 997 | 321 | 159 | 721 | 640 |
| **COSTO** | 7 | 11 | 3 | 7.5 | 6.5 | 12.2 | 5.1 | 3.2 | 10.7 | 8.8 |

# Esempio 3: Set Packing

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| $C_2$ | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| $C_3$ | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| $C_4$ | 1 | | 1 | | | 1 | | | | 1 |
| $C_5$ | | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | |
| $C_6$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | | |
| $C_7$ | | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | 1 |
| $C_8$ | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | |
| **CAP** | 460 | 774 | 129 | 499 | 345 | 997 | 321 | 159 | 721 | 640 |
| **COSTO** | 7 | 11 | 3 | 7.5 | 6.5 | 12.2 | 5.1 | 3.2 | 10.7 | 8.8 |

Supponendo che l'amministrazione non voglia piazzare più di un impianto vicino ad ogni città, formulare un modello di Programmazione Lineare Intera che risolve il problema di massimizzare la capacità produttiva totale degli impianti aperti, mantenendo il costo totale di installazione inferiore al budget di 30 milioni di euro.

# Esempio 3: Set Packing

$$\max\ 460x_1 + 774x_2 + 129x_3 + 499x_4 + 345x_5 + 997x_6 + 321x_7 + 159x_8 + 721x_9 + 640x_{10}$$

$$(1)\ \ x_1 + x_4 + x_6 + x_{10} \le 1$$

$$(2)\ \ x_2 + x_5 + x_7 + x_9 \le 1$$

$$(3)\ \ x_1 + x_5 + x_7 + x_9 \le 1$$

$$(4)\ \ x_1 + x_3 + x_6 + x_{10} \le 1$$

$$(5)\ \ x_2 + x_6 + x_7 + x_9 \le 1$$

$$(6)\ \ x_2 + x_4 + x_6 \le 1$$

$$(7)\ \ x_2 + x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 1$$

$$(8)\ \ x_3 + x_4 + x_6 + x_8 \le 1$$

$$(9)\ \ 7x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 7.5x_4 + 6.5x_5 + 12.2x_6$$
$$+ 5.1x_7 + 3.2x_8 + 10.7x_9 + 8.8x_{10} \le 30$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,2,\ldots,m$$

**sw:** ampl
**ampl:** option solver cplex;
**ampl:** model ./Example/inceneritori_single.mod;
**ampl:** solve;
CPLEX 11.2.0: optimal integer solution; **objective 1342**
5 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
**ampl:** display x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10;
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 0
x4 = 0
x5 = 1
x6 = 1
x7 = 0
x8 = 0
x9 = 0
x10 = 0

# Esempio 3: Set Packing

## .mod

```
param l_città;
param l_posizioni;
param u_città > l_città;
param u_posizioni > l_posizioni;

set città:=l_città..u_città;
set posizioni:=l_posizioni..u_posizioni;

var x{posizioni} binary;
param cap_smaltimento{posizioni};
param b{città};
param costo_costruzione{posizioni};
param a{città,posizioni};
param budget;

maximize cap: sum{i in posizioni} cap_smaltimento[i]*x[i];
subject to 	c1 {i in città}: sum{j in posizioni} a[i,j]*x[j] <= b[i];
subject to 	c2 : sum{j in posizioni} costo_costruzione[j]*x[j] <= budget;
```

## .dat

```
param l_città := 1;
param u_città := 8;
param l_posizioni := 1;
param u_posizioni := 10;

param budget:=30;

param a: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10:=
1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1
2 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0
3 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0
4 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1
5 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0
6 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0
7 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1
8 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0;
```

| param | cap_smaltimento:= |
|---|---|
| 1 | 460 |
| 2 | 774 |
| 3 | 129 |
| 4 | 499 |
| 5 | 345 |
| 6 | 997 |
| 7 | 321 |
| 8 | 159 |
| 9 | 721 |
| 10 | 640; |

| param | b:= |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1; |

| param | costo_costruzione:= |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 2 | 11 |
| 3 | 3 |
| 4 | 7.5 |
| 5 | 6.5 |
| 6 | 12.2 |
| 7 | 5.1 |
| 8 | 3.2 |
| 9 | 10.7 |
| 10 | 8.8; |